ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ

КАКИЕ ЕСТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ТАБЛИЦЕ?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1 СИММЕТРИЧНОСТЬ

Таблица симметрична относительно главной диагонали из-за переместительного свойства (коммутативности) умножения:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

для всех вещественных *a* и *b*

(то есть для всех чисел, лежащих на числовой прямой).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

ВОПРОС

Было бы то же самое для таблицы сложения? вычитания? деления?

СВОЙСТВО ЕДИНИЦЫ

Первый столбец (строка) повторяет «шапку» таблицы:

$$\boldsymbol{1 \cdot a = a}$$

для всех вещественных ***a***

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**2**	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	**3**	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	**4**	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	**5**	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	**6**	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	**7**	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	**8**	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	**9**	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	**10**	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ВОПРОС

Для какого числа можно записать ответ в явном виде (без знаков арифметических действий в ответе) при умножении его на любое вещественное *a*?

2 СПРАВКА: ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

Можем представить делимость числа *a* на число *k* как *a* «солдатиков», которые выстроились в ряды по *k* «солдатиков» в каждом.

ПРИМЕРЫ

$a = 20$, $k = 4$

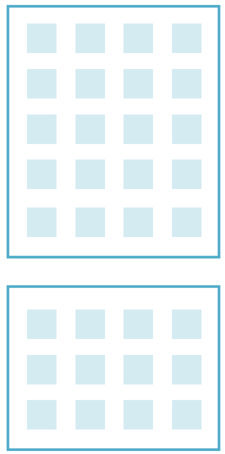
Если все ряды заполнены полностью, то *a* делится на *k* **нацело** (без остатка).

$a = 18$, $k = 4$

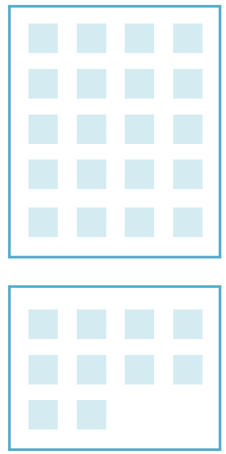
Если в последний ряд заполнен не до конца, то количество «солдатиков» в нем является остатком от деления *a* на *k* (а количество полностью заполненных рядов – целой частью от деления *a* на *k*).

СВОЙСТВА

Если два числа делятся на *k*, то их сумма делится на *k*:

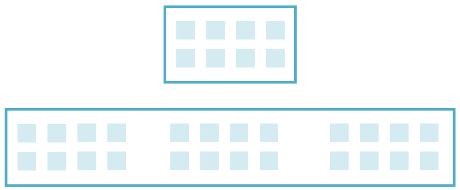


Если одно число делится на *k*, а другое нет, то их сумма не делится на *k*:



ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Если число *a* делится на *k*, то все кратные числа *a* тоже делятся на *k*.



ВОПРОС

Если оба числа не делятся на *k*, то что можно сказать про их сумму? Приведите примеры.

3 ДЕЛИМОСТЬ НА 5

В строке (столбце) умножения на 5 все числа оканчиваются **на 0 или на 5**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	**10**	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	**15**	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	**20**	24	28	32	36	40
5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
6	6	12	18	24	**30**	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	**35**	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	**40**	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	**45**	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	**50**	60	70	80	90	100

Почему? Рассмотрим пример.

Любое число можно представить как $\mathbf{10}x+y$, где y — это последняя цифра числа. Например, $121 = \mathbf{10} \cdot 12 + 1$.

Первое слагаемое, очевидно, делится на 5 (так как 10 делится на 5, а $10x$ кратно 10). Значит, сумма будет делиться на 5, только если второе слагаемое будет делиться на 5 (или равняться 0 — тогда сумма будет равна первому слагаемому, делящемуся на 5).

Отсюда получаем, что последняя цифра может быть только 5 или 0, так как других чисел, делящихся на 5 и записывающихся одной цифрой, не существует.

ДЕЛИМОСТЬ НА 2

В строке (столбце) умножения на 2 все числа оканчиваются **на четную цифру**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
3	3	**6**	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	**8**	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	**10**	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	**12**	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	**14**	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	**16**	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	**18**	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	**20**	30	40	50	60	70	80	90	100

ЗАДАНИЕ

Проведите рассуждения, аналогичные делимости на 5.

ДЕЛИМОСТЬ НА 9

УМНОЖЕНИЕ «НА ПАЛЬЦАХ»

В строке (столбце) умножения на 9 первые цифры (число десятков) **идут подряд от 0 до 9, а вторые** (число единиц) **— от 9 до 0.**

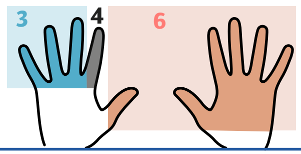
9	09	18	27	36	45	54	63	72	81	90

9	09	18	27	36	45	54	63	72	81	90

Это свойство можно представить как умножение «на пальцах»: отсчитываем слева направо и загибаем палец, «на который» хотим умножить.
Тогда количество пальцев слева — число десятков, а справа — число единиц.

НАПРИМЕР

$9 \cdot 4 = 36$



Как это доказать?
Пусть мы хотим умножить 9 на k — загибаем палец k.
Тогда слева пальцев k-1, а справа — 10-k.
Предполагаем, что 10, умноженное на количество пальцев слева, плюс количество пальцев справа будет равно 9k, то есть $10(k-1)+(10-k)=9k$.

Признак делимости на 9:
сумма цифр делится на 9.

ПРОВЕРИМ НА ПРИМЕРЕ

Рассмотрим число 121.
Разложим по разрядам:
$121 = 100 + 20 + 1 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$
Представим числа, кратные 10, как сумму единицы и числа, состоящего из девяток:
$1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 =$
$=1 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 1 \cdot 1.$
Раскроем скобки и перегруппируем:
$1 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 1 \cdot 1 =$
$=1 \cdot 99 + 1 + 2 \cdot 9 + 2 + 1 =$
$= (1 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (1 +2 +1)$
Сумма в первых скобках делится на 9, так как числа, состоящие только из 9, делятся на 9
(например, $9999 = 1111 \cdot 9$ делится на 9).
Сумма во вторых скобках представляет собой сумму цифр исходного числа.
Задание: доведите рассуждение до конца.

ЗАДАНИЕ

Раскройте скобки и убедитесь, что равенство верно.

ДЕЛИМОСТЬ НА 3

Признак делимости на 3:
сумма цифр делится на 3.

ЗАДАНИЕ

Проведите рассуждения, аналогичные разбору признака делимости на 9.

5 ГЛАВНАЯ ДИАГОНАЛЬ (1, 4, 9, 16, ...)

Каждое число на диагонали:

- является квадратом числа,
- отличается от предыдущего на нечетное число,
- нечетные числа, на которые отличаются последовательные квадраты, так же последовательно увеличиваются: 1 + 3 = 4, 4 + 5 = 9, 9 + 7 = 16, ...

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

Другими словами: сумма подряд идущих нечетных чисел является квадратом какого-то числа.

Каждый следующий квадрат отличается от предыдущего на «уголок», состоящий из нечетного количества квадратов. Причем каждый следующий уголок отличается от предыдущего на 2 квадрата — ровно такая разница между последовательными нечетными числами.

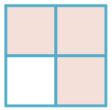
ДОКАЖЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ

Число 1

— это квадрат со стороной 1:

Число 4

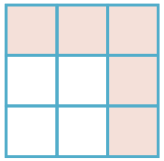
— это квадрат со стороной 2:



отличается от 1 на 3 квадрата

Число 9

— это квадрат со стороной 3:



отличается от 4 на 5 квадратов, и так далее

ЗАДАНИЕ

Проведите аналогичные рассуждения для диагонали, расположенной под главной.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Найдите и разберите закономерности на побочной диагонали таблицы умножения и параллельных ей: