ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
$ax - by = 0$

Будем теперь считать, что коэффициенты a, b, c — неотрицательные целые числа.

Почему уравнение $ax - by = c$ задает прямую на координатной плоскости?

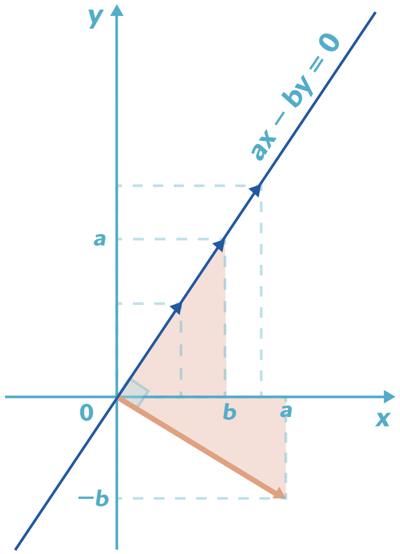
Рассмотрим сначала однородное уравнение $ax - by = 0$.

Изобразим вектор $(a, -b)$.
Точка (x, y) является решением уравнения ⇔ вектор (x, y) перпендикулярен вектору $(a, -b)$.

Заметим, что
$x = b$, $y = a$ — решение.
А также, решениями будут все точки вида

$x = \lambda b$, $y = \lambda a$

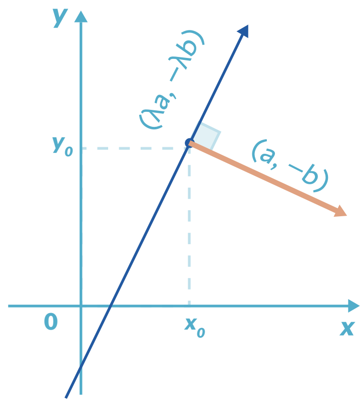
Эти точки образуют прямую, перпендикулярную вектору $(a, -b)$.



Геометрический смысл записи $ax - by = 0$ состоит в том, что скалярное произведение векторов $(a, -b)$ и (x, y) равно нулю (эти векторы перпендикулярны).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
$ax - by = c$

Пусть мы нашли точку (x_0, y_0), удовлетворяющую уравнению. Отложим из нее вектор $(a, -b)$. Теперь, отложив из этой же точки произвольный вектор, перпендикулярный $(a, -b)$, получим точку:



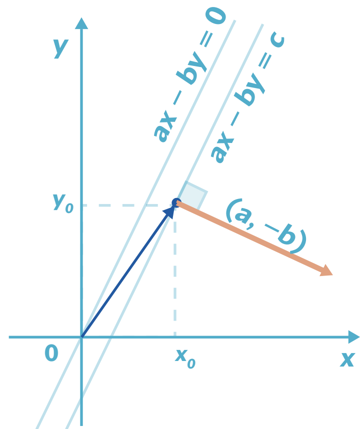
$$(x_0, y_0) + \lambda(b, a) = [x_0 + \lambda b, y_0 + \lambda a]$$

Подставим эту точку в уравнение:

$$a(x_0 + \lambda b) - b(y_0 + \lambda a) = ax_0 + \lambda ab - by_0 - \lambda ab = ax_0 - by_0 = c$$

Следовательно, все такие точки, лежащие на прямой, перпендикулярной вектору $(a, -b)$, и только они будут решениями нашего уравнения.

Вспомним однородное уравнение $ax - by = 0$.
Прямая, соответствующая этому уравнению, проходит через начало координат параллельно нашей прямой.
И все целочисленные точки прямой $ax - by = c$ получаются параллельным переносом целочисленных точек прямой $ax - by = 0$ на один и тот же вектор.



Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

ПРИМЕР 1 $15x - 27y = 6$

Найдем НОД(15, 27) при помощи алгоритма Евклида:
$27 = 15 \cdot 1 + 12$
$15 = 12 \cdot 1 + 3$ =НОД(15,27)
$12 = 3 \cdot 4$

ВЫРАЖАЕМ 3:

$3 = 15 - 12 \cdot 1 = 15 - (27 - 15 \cdot 1) = 15 \cdot 2 - 27 \cdot 1 \Rightarrow$
$6 = 15 \cdot 4 - 27 \cdot 2 \Rightarrow x_0 = 4,\ y_0 = 2.$
Итак, мы нашли частное решение исходного уравнения.
Теперь ищем все целые точки на прямой, сдвинутой параллельно нашей, в начало координат:

$15x = 27y$ (делим на 3)
$5x = 9y$ =>
$\overset{\frown}{x} = 9t,\ \overset{\frown}{y} = 5t$, где t — любое целое число.

ОТВЕТ:
общим решением будет
$x = 4 + 9t,\ y = 2 + 5t$, где t — любое целое число.

ПРИМЕР 2 $10x - 18y = 3$

Найдем НОД(10, 18) при помощи алгоритма Евклида:
$18 = 10 \cdot 1 + 8$
$10 = 8 \cdot 1 + 2$ =НОД(15,27)
$8 = 2 \cdot 4$

Т.к. 3 не делится на НОД(10, 18) = 2, целых решений у этого уравнения не будет.
Действительно, оно равнозначно $5x - 9y = 1{,}5$, и слева должно получиться целое число, а справа стоит дробное.
В то же время, рациональные решения будут.

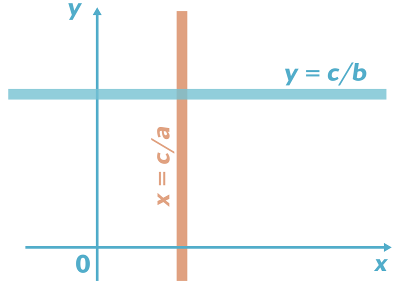
Пусть $y = m/n$, где m, n — целые числа $(n \neq 0)$.
Подставляя y в уравнение, получим, что
$x = 0{,}3 + 9m/5n$.

ОТВЕТ:
общим решением в рациональных числах будет
$x = 0{,}3 + 9m/5n,\ y = m/n$, где m, n — целые числа $(n \neq 0)$.

А ЕСЛИ *a* ИЛИ *b* РАВНО НУЛЮ?

Ищем все рациональные решения уравнения

$$ax + by = c.$$



1 ▶ Пусть $a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow by = c \Rightarrow y = c/b$

2 ▶ Пусть $b = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ax = c \Rightarrow x = c/a$

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ:

сл. 1 ▶ Если y — целое, то все точки с целыми координатами x — решения;

сл. 2 ▶ Если x — целое, то все точки с целыми координатами y — решения;

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ:

сл. 1 ▶ все точки с рациональными координатами x;

сл. 2 ▶ все точки с рациональными координатами y.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов