1 СОПРЯЖЕНИЕ

Пусть у нас есть любая перестановка τ. Например, такая:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$$

Пусть σ – любая перестановка на таком же количестве символов:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Сопряжением перестановки τ перестановкой σ называется следующая конструкция:

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$$

Можно убедиться в том, что для наших τ и σ:

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (\sigma_1\ \sigma_3)\ (\sigma_2\ \sigma_4)$$

Оказывается, для любой перестановки τ сопряжение ее произвольной перестановкой на любом количестве символов формирует перестановку, которая имеет точно такую же структуру разложения в циклы, как и τ.

Например:

$$\tau = (3\ 5\ 1)(2\ 6)(4\ 8\ 7) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (\sigma_3\ \sigma_5\ \sigma_1)(\sigma_2\ \sigma_6)(\sigma_4\ \sigma_8\ \sigma_7)$$

Сопряжение формирует перестановку такого же порядка, четности, с таким же разбиением в циклы. Получается целый **класс сопряженности**, в котором все перестановки сохраняют эти свойства и получаются сопряжением друг из друга.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Пусть две перестановки τ и τ_1 имеют одинаковую структуру разложения на циклы. Тогда существует такая перестановка σ, что $\tau_1 = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Для любых перестановок τ и τ_1 можно непосредственно построить такую перестановку. Покажем это на конкретном примере.
Пусть $\tau = (351)(26)(487)$, а
$\tau_1 = (168)(45)(273)$ — любая другая перестановка с таким же разбиением в циклы.

Найдем такую перестановку σ, что $\tau_1 = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$.

σ можно легко выписать:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Эта перестановка σ не является единственной, обладающей таким свойством. Например, если мы сдвинем по кругу элементы в циклах в разложении τ, сама перестановка τ не изменится:
$\tau = (351)(26)(487) = (513)(62)(874)$, а сопрягающая перестановка будет другой.

Задача по комбинаторике (сложная!): как подсчитать количество сопрягающих перестановок?

Таким образом все перестановки, имеющие одинаковое разбиение на циклы, сопряжены друг с другом. Можно задать класс сопряженности указанием на то, сколько и каких циклов должно быть в перестановке.

2 КЛАССЫ СОПРЯЖЕННОСТИ В S_3 И S_4

S_3 состоит из 6-ти перестановок:
Id, (123), (132), (12), (13), (23).

Объединяя те из них, которые имеют одинаковую структуру разбиения на циклы, мы получаем три класса сопряженности в S_3:

[*Id*], [(123), (132)], [(12), (13), (23)].

Гораздо более интересный пример: группа перестановок на 4-х элементах (S_4), содержащая 24 перестановки.

Здесь возникнут следующие классы сопряженности:

- [Id];
- [(. . . .)] — 1 цикл из 4-х элементов;
- [(. . .)] — 1 цикл из 3-х элементов;
- [(. .)] — 1 цикл из 2-х элементов;
- [(. .)(. .)] — 2 цикла из 2-х элементов.

Выпишем все перестановки из S_4 в явном виде и подсчитаем, сколько из них в какой класс сопряженности попадает.

Структура циклов	-	(. .)	(. . .)	(. . . .)	(. .)(. .)
перестановки в классе сопряженности	*Id*	(1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4)	(1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3)	(1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 3 2 4), (1 3 4 2), (1 4 2 3), (1 4 3 2)	(1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)
количество	1	6	8	6	3