1 На прошлом уроке мы изучали гомоморфизм $F: S_3 \to S_6$ такой, что $\forall \sigma \in S_3$ $F(\sigma) = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1}$, где δ — набор из 6 элементов — перестановок из S_3.

Мы выяснили, что F распадается на три гомоморфизма, каждый из которых действует в своем классе сопряженности в S_3:

$F_1 : S_3 \to S_1 = \{Id\}$

$F_2 : S_3 \to S_3$

$F_3 : S_3 \to S_2$

Структура гомоморфизмов F_1, F_2, F_3

	F_1	F_2	F_3
образ	Id	S_3	S_2
ядро	S_3	$\{Id\}$	$\{Id, (123), (132)\}$

ТЕОРЕМА

Других гомоморфизмов из S_3 нет.

Чтобы доказать эту теорему, нужно понять, как может быть устроено ядро гомоморфизма.

Заметим, что если некоторые элементы σ и τ переходят в Id, то и их композиция $\sigma \circ \tau$ тоже переходит в Id. Также вместе с элементом σ и его обратный σ^{-1} тоже должен переходить в Id, и сам Id тоже переходит в Id.

Таким образом, ядро гомоморфизма — это всегда подгруппа.

ЛЕММА

Существует ровно 6 подгрупп в S_3:
$\{Id\}$, $\{Id, (12)\}$, $\{Id, (13)\}$, $\{Id, (23)\}$, $\{Id, (123), (132)\}$,
$\{Id, (12), (13), (23), (123), (132)\} = S_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Заметим, что в любой группе перестановок S_n подмножество $\{Id, (ij)\}$ будет подгруппой.

Более того, в любой группе, если a — элемент второго порядка (такой, что $a^2 = Id$), подмножество $\{Id, a\}$ будет подгруппой. Например, $\{Id, S_A\}$ в группе движений прямой для любого отражения S_A и $\{Id, S_l\}$ в группе движений окружности для любого отражения S_l являются подгруппами.

$\{Id, (123), (132)\}$ — подгруппа, т.к. $(123)^2 = (132)$, $(132)^2 = (123)$, $(123)^3 = (132)^3 = Id$, а также, $(123)^{-1} = (132)$.

Докажем, что других подгрупп в S_3 нет.
Любая подгруппа, содержащая (ij) и (ik), должна содержать их композицию (ijk), а значит, и обратный (ikj), а значит, и всю группу.

Если к $\{Id, (123), (132)\}$ добавить хоть одну транспозицию (ij), то надо добавлять все 3, т.к., например, $(123)(12) = (13)$ и т.д.

ЛЕММА ДОКАЗАНА

ВОПРОС

Любая ли подгруппа может быть ядром гомоморфизма?

УТВЕРЖДЕНИЕ

Если (12) лежит в ядре какого-нибудь гомоморфизма $F: S_3 \to H$, где H — произвольная группа, то $\mathrm{Ker}(F) = S_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть (12) принадлежит ядру F. Значит, $F((12)) = Id \in H$.

Тогда $\forall\, \sigma \in S_3$ по основному свойству гомоморфизма $F(\sigma \circ (12) \circ \sigma^{-1}) = F(\sigma) \circ F((12)) \circ F(\sigma^{-1}) = F(\sigma) \circ Id \circ F(\sigma^{-1}) = Id \in H$ т.к. $F(\sigma^{-1}) = (F(\sigma))^{-1}$. Значит, транспозиции (13) и (23), которые получаются из (12) сопряжением, тоже принадлежат ядру F. Но ядро — подгруппа. Единственная подгруппа в S_3, содержащая (12), (13), (23) — это сама группа S_3.

УТВЕРЖДЕНИЕ ДОКАЗАНО

НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА

Итак, мы поняли, что ядром гомоморфизма может быть не любая подгруппа, а только та, за пределы которой мы не выходим в результате операции сопряжения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Подгруппа $H \in G$, замкнутая относительно операции сопряжения, называется нормальной. Обозначается $H \triangleright G$

Нормальная подгруппа вместе с каждым своим элементом содержит и все сопряженные с ним.

Таким образом, в S_3, кроме тривиальных подгрупп ($\{Id\}$ и самой S_3), существует только одна нормальная подгруппа $\{Id, (123),(132)\}$, которая является ядром гомоморфизма F_3. Это подгруппа четных перестановок — A_3 .

Отсюда следует, что в S_3 существует только один нетривиальный гомоморфизм F_3: $S_3 \to S_2$ («знак»).

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

Заметим, что если $H \triangleright G$, то существует такой гомоморфизм групп $F: G \to K$, что $\mathrm{Ker}(F) = H$.

На следующем уроке мы будем говорить о гомоморфизмах, которые возникают в S_n при $n \geqslant 4$ и выясним, в чем уникальность группы S_4.