1 ПОРОЖДАЮЩЕЕ ПОДМНОЖЕСТВО

На прошлом уроке мы познакомились с группой Клейна, подгруппой в группе перестановок на 4-х символах S_4:

$$\{Id, (12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$$

Позже, в конце курса, мы познакомимся с некоторыми интересными приложениями группы Клейна.

А сейчас рассмотрим еще одно важное понятие в теории групп — **порождающее подмножество.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Подмножество группы G называется порождающим, если все элементы группы G могут быть получены из этого подмножества в результате операций: композиции и взятия обратного элемента.

ПРИМЕР:

В группе S_3 порождающим будет подмножество, состоящее из любых двух нетривиальных перестановок, за исключением пары $\{(123), (132)\}$, которая порождает только подгруппу четных перестановок: $A_3 = \{Id, (123), (132)\}$.

ТЕОРЕМА

В любой группе перестановок S_n порождающим будет множество из двух элементов: $[(12), (12\ldots n)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Известно, что любая перестановка раскладывается в произведение транспозиций (циклов длины 2).

Докажем, что любая транспозиция может быть представлена в виде произведения следующих транспозиций:
$(12), (23), (34), \ldots (n-1n)$.
Например,
$(1k) = (12)(2k)(12) = (12)(23)(3k)(23)(12) = \ldots =$
$= (12)(23)(34)\ldots(k-1k)\ldots(34)(23)(12)$.
И так далее.
Теперь осталось понять, как этот ряд транспозиций
$(12), (23), (34), \ldots (n-1n)$ может быть порожден двумя перестановками (12) и $(12\ldots n)$. Воспользуемся сопряжением:
$(12\ldots n)(12)(12\ldots n)^{-1} = (12\ldots n)(12)(n\ldots 21) = (23)$,
$(12\ldots n)^2(12)(12\ldots n)^{-2} = (12\ldots n)(23)(n\ldots 21) = (34)$,
И так далее.
$(12\ldots n)^k(12)(12\ldots n)^{-k} = (1+k\ 2+k)$

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

2 Еще одна важная теорема о порождающем подмножестве связана с группой четных перестановок A_n.

ТЕОРЕМА

A_n порождается циклами длины 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Любая четная перестановка представима в виде произведения четного количества транспозиций. Разобьем по парам это представление:

$$\sigma = (i_1 i_2)(i_3 i_4)\ldots(i_{k-1} i_k)(i_k i_{k+1})$$

Рассмотрим произвольную такую пару $(ij)(kl)$.

1-Й СЛУЧАЙ ▶ $k = i, j = l \Rightarrow Id.$

1-Й СЛУЧАЙ ▶ $j = l \Rightarrow (ij)(jk) = (ijk).$

1-Й СЛУЧАЙ ▶ все различные $\Rightarrow (ij)(kl) = (ij)\underbrace{(jk)(jk)}_{= Id}(kl) = (ijk)(jkl).$

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Эта теорема играет важную роль при доказательстве сложной теоремы о A_n:

ТЕОРЕМА

A_n не содержит нетривиальных нормальных подгрупп.

Мы докажем эту теорему для $n = 5$, пользуясь совершенно другими методами, а именно, опираясь на следующий факт:

УТВЕРЖДЕНИЕ

(без доказательства) Для любой подгруппы H группы G $|H|$ делит $|G|$ (кол-во элементов подгруппы H делит кол-во элементов группы G).

Пусть $n = 5$. Мы можем разбить все перестановки из S_5 по их цикленной структуре на классы сопряженности и определить кол-во элементов в классах, где перестановки четные.

Id	(**)	(***)	(****)	(*****)	(**)(***)	(**)(**)
1		20		24		15
ч	н	ч	н	ч	н	ч

$|S_5| = 5! = 120 \Rightarrow |A_5| = 60$ (ровно половина — четные).

Нормальная подгруппа должна содержать классы сопряженности целиком $\Rightarrow$ любая подгруппа в A_5 должна иметь количество элементов, сложенное из 1 (т.к. Id всегда лежит в подгруппе) и любого сочетания из 20, 24 и 15.

Но ни одна из таких сумм не дает число, делящее 60. Следовательно, нормальных подгрупп в A_5 не существует.