1 ТЕОРЕМА «О ТРЕХ ГВОЗДЯХ»

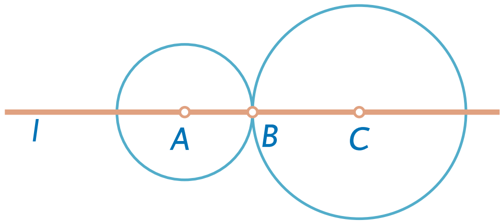
ТЕОРЕМА

Если у движения g есть две различные неподвижные точки, то неподвижной является прямая, проходящая через эти две точки.

Если есть неподвижная точка вне этой прямой, то это тождественное преобразование (отдельно это утверждение можно назвать «теоремой о трех гвоздях»). Если движение имеет только 2 неподвижные точки, то g — отражение относительно прямой, проходящей через эти точки.

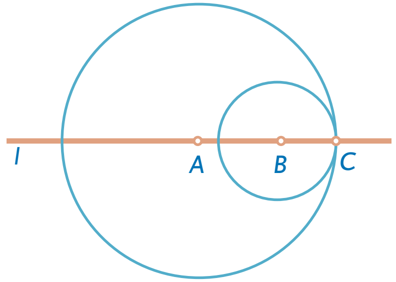
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $g(A) = A$, $g(B) = B$. Проведем через точки A, B прямую l и возьмем произвольную точку C на отрезке AB.



Так как движение сохраняет расстояния, точка $g(C)$ должна, с одной стороны, лежать на окружности с центром в точке A и радиусом AC, а с другой стороны, на окружности с центром в точке B и радиусом BC. Единственная точка пересечения этих окружностей — точка C, следовательно, $g(C) = C$ для любой точки C из отрезка AB.

Пусть теперь точка C лежит на прямой l вне отрезка AB. Как и в предыдущем случае, точка $g(C)$ должна лежать и на окружности с центром в точке A и радиусом AC, и на окружности с центром в точке B и радиусом BC. Эти окружности имеют единственную общую точку — точку $C \Rightarrow g(C) = C$.



Таким образом, вся прямая l неподвижна при движении g.

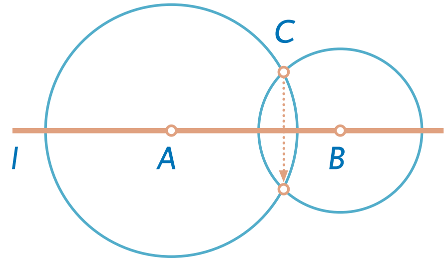
Пусть $g(C) = C$, и $C \notin l$. Докажем, что $g = Id$.

Прямая, проходящая через точку C и любую точку на прямой l, будет неподвижна по доказанному. Эти прямые покрывают всю плоскость, за исключением прямой, проходящей через точку C параллельно l. Но через любую точку этой прямой можно провести прямую, содержащую неподвижные точки, а значит, и вся прямая будет неподвижна. Таким образом, вся плоскость при движении g неподвижна $\Rightarrow g = Id$.

Альтернативно можно было воспользоваться непрерывностью движения. В последующих уроках мы к этому вернемся.

Пусть теперь только прямая l неподвижна при движении g. Куда может перейти точка $C \notin l$?

Единственная возможность для $g(C)$ — вторая точка пересечения окружностей, симметричная C относительно прямой $l \Rightarrow g = S_l$.



ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Таким образом, нами рассмотрены случаи, когда движение оставляет на месте 3 точки, не лежащие на одной прямой, и 2 точки. Рассмотрим оставшиеся два случая:

- одна неподвижная точка;
- нет неподвижных точек.

2 ОДНА НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА

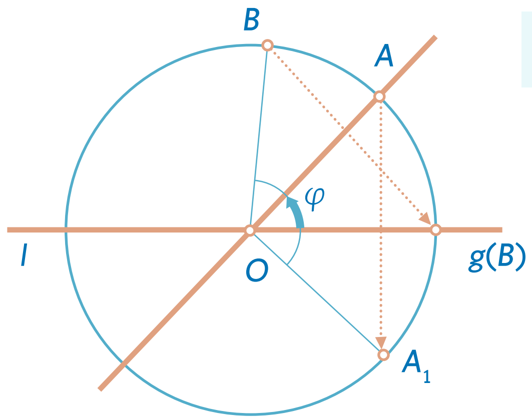
Пусть $O = g(O)$ — единственная неподвижная точка.
Тогда для любой точки A ее образ $A_1 = g(A)$ лежит на окружности с центром в O и радиусом OA.
Проведем серединный перпендикуляр l к отрезку AA_1 (он пройдет через т. O).
Рассмотрим $h = S_l \circ g$.
$h(O) = O$, $h(A) = A \ \Rightarrow\ S_l \circ g = Id$ либо $S_l \circ g = S_{OA}$.

1-Й СЛУЧАЙ ▶ $S_l \circ g = Id.$

Домножим на S_l:
$S_l \circ (S_l \circ g) = S_l \circ Id \Rightarrow (S_l \circ S_l) \circ g = S_l \Rightarrow g = S_l$, невозможно, т.к. у g только одна неподвижная точка.

2-Й СЛУЧАЙ ▶ $S_l \circ g = S_{OA}$

Домножим на S_l:
$S_l \circ (S_l \circ g) = S_l \circ S_{OA} \Rightarrow (S_l \circ S_l) \circ g = S_l \circ S_{OA} \Rightarrow g = S_l \circ S_{OA}$.
Это будет поворот на двойной угол между l и OA.



$g = S_l \circ S_{OA} = R_{-2\varphi}$

$\varphi = < (l, OA)$

Проверим это. Точка B, отстоящая от точки A на угол φ, под действием g повернулась на угол -2φ. Точно так же точка $A_1 = g(A)$ отстоит от точки A на угол -2φ (по построению).
Получаем, что композиция $R_{2\varphi} \circ g$ оставляет на месте три точки: O, A, $B \Rightarrow R_{2\varphi} \circ g = Id$.

Домножим на $R_{-2\varphi} : R_{-2\varphi} \circ R_{2\varphi} \circ g = R_{-2\varphi} \Rightarrow g = R_{-2\varphi}$.

НЕТ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Возьмем любую точку O и ее образ $g(O)$, соединим отрезком и построим к нему серединный перпендикуляр l.
Пусть $h = S_l \circ g$. Тогда O — неподвижная точка для h.
По доказанному ранее
$h = Id$, либо $h = S_m$, либо $h = S_m \circ S_n$.
Можем все три равенства домножить слева на S_l:

$$S_l \circ h = (S_l \circ S_l) \circ g = g = \begin{cases} S_l \\ S_l \circ S_m \\ S_l \circ S_m \circ S_n \end{cases}$$

$g = S_l$ и $g = S_l \circ S_m$ при $l \nparallel m$ имеют неподвижные точки.
При $l \parallel m$ $g = S_l \circ S_m$ есть параллельный перенос.
Нам остается изучить ситуацию, когда $g = S_l \circ S_m \circ S_n$, чем мы займемся на следующем уроке.

Отметим, что мы попутно доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА:
Любое движение плоскости является композицией не более чем трех отражений.