1 КОМПОЗИЦИЯ ДВУХ ОТРАЖЕНИЙ

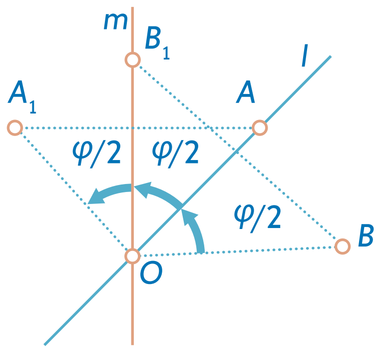
$S_m \circ S_l = ?$ На уроке 31 мы разобрали все возможные случаи:

Id, если $l = m$;

$T_{\vec v}$, если $l \parallel m$ ($\vec v$ — вектор, перпендикулярный прямым l и m и равный удвоенному расстоянию между ними);

R^O_φ, где O — точка пересечения прямых l и m, $\varphi = 2\angle(l, m)$.

Повторим ход **теоретико-группового доказательства** на примере случая $S_m \circ S_l = R^O_\varphi$.



1 ▶ Смотрим, куда переходят 3 точки ($A \to A_1$, $B \to B_1$, $O \to O$);

2 ▶ Гипотеза: это поворот R^O_φ

3 ▶ Домножаем слева на обратное движение:

$R^O_{-\varphi} \circ S_m \circ S_l$

и смотрим, куда полученная композиция переводит точки A, B, O (оставляет на месте);

4 ▶ По теореме «о трех гвоздях» это Id.

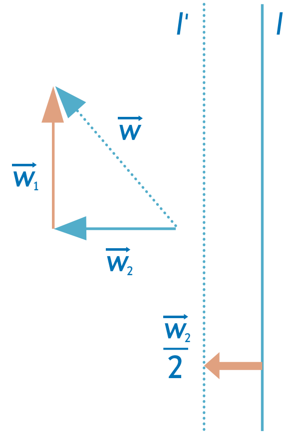
$R^O_{-\varphi} \circ S_m \circ S_l = Id$

5 ▶ Домножаем обе части на R^O_φ

$R^O_\varphi \circ R^O_{-\varphi} \circ S_m \circ S_l = R^O_\varphi \Rightarrow S_m \circ S_l = R^O_\varphi$

КОМПОЗИЦИЯ ПЕРЕНОСА И ОТРАЖЕНИЯ

$T_{\vec w} \circ S_l = ?$



Представим вектор $\vec w = \vec w_1 + \vec w_2$, где $\vec w_1 \parallel l$, $w_2 \perp l$

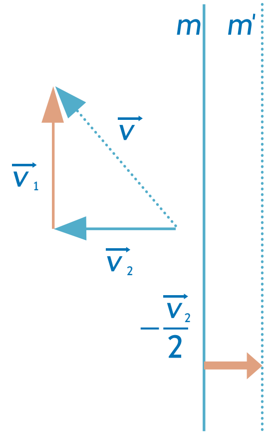
Тогда $T_{w_2} = S_{l'} \circ S_l$, где $l' \parallel l$ и расстояние между l и l' равно $\frac{w_2}{2}$.

$T_{\vec w} \circ S_l = T_{\vec w_1} \circ S_{l'} \circ S_l \circ S_l = T_{\vec w_1} \circ S_{l'} = L^{\vec w_1}_{l'}$

— скользящая симметрия.

$S_m \circ T_{\vec v} = ?$

Аналогично предыдущему случаю,



$\vec v = \vec v_1 + \vec v_2$

$S_m \circ T_{\vec v} = S_m \circ S_m \circ S_{m'} \circ T_{\vec v_1} = S_{m'} \circ S_{\vec v_1} = L^{\vec v_1}_{m'}$

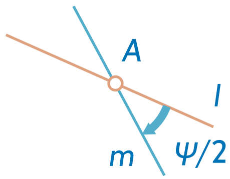
— скользящая симметрия.

2 КОМПОЗИЦИЯ ПОВОРОТА И ОТРАЖЕНИЯ

$R^A_\psi \circ S_l = ?$

1 СЛУЧАЙ ▶ $A \in l \Rightarrow R^A_\psi = S_m \circ S_l \Rightarrow R^A_\psi \circ S_l = S_m$

— отражение.

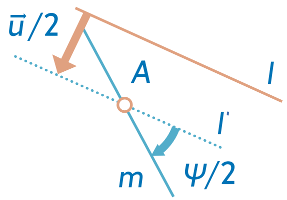


2 СЛУЧАЙ ▶ $A \notin l \Rightarrow$ проведем через т. A прямую $l' \parallel l$.

$R^A_\psi = S_m \circ S_{l'} \Rightarrow$

$R^A_\psi \circ S_l = S_m \circ S_{l'} \circ S_l = S_m \circ T_{\vec u} = L^{\vec u}_m$

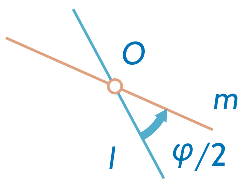
— скользящая симметрия.



$S_m \circ R^O_\varphi = ?$

1 СЛУЧАЙ ▶ $O \in m \Rightarrow R^O_\varphi = S_m \circ S_l \Rightarrow S_m \circ R^O_\varphi = S_l$

— отражение.

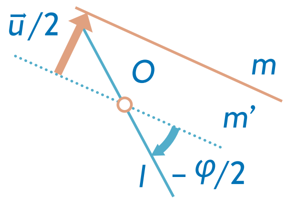


2 СЛУЧАЙ ▶ $O \notin m \Rightarrow$ проведем через т. O прямую $m' \parallel m$.

$R^O_\varphi = S_{m'} \circ S_l \Rightarrow$

$S_m \circ R^O_\varphi = S_m \circ S_{m'} \circ S_l = T_{\vec u} \circ S_l = L^{\vec u}_l$

— скользящая симметрия.



КОМПОЗИЦИЯ СО СКОЛЬЗЯЩЕЙ СИММЕТРИЕЙ

Нам осталось изучить композиции со скользящей симметрией:

1 ▶ переноса;

2 ▶ поворота;

3 ▶ отражения;

4 ▶ другой скользящей симметрии.

1 ▶ $T_{\vec w} \circ L^{\vec a}_n = (T_{\vec w} \circ T_{\vec a}) \circ S_n = T_{\vec w + \vec a} \circ S_n = \begin{cases} S, (\vec w + \vec a) \perp n \\ L, \text{иначе} \end{cases}$

Композиция переноса со скользящей симметрией есть композиция нового переноса и некоторого отражения, что в общем случае дает некоторую новую скользящую симметрию.
Для композиции в обратном порядке получится некоторая другая скользящая симметрия (или отражение в частном случае).

2 ▶ $L^{\vec b}_r \circ R^O_\varphi = S_r \circ T_{\vec b} \circ R^O_\varphi = S_r \circ R^B_\varphi = \begin{cases} S \\ L \end{cases}$

Композиция поворота со скользящей симметрией есть композиция некоторого отражения и поворота на тот же угол относительно новой точки B, что в общем случае есть некоторая новая скользящая симметрия. В частном случае (можно в качестве упражнения разобраться, в каком) получится отражение.

Для композиции в обратном порядке все аналогично.

3

3 Композиция отражения и скользящей симметрии, как мы уже поняли ранее, будет либо переносом, либо поворотом. Мы перейдем к изучению композиции двух скользящих симметрий, в процессе чего столкнемся с этим движением тоже.

4

$$L_r^{\vec b} \circ L_n^{\vec a} = S_r \circ T_{\vec b} \circ T_{\vec a} \circ S_n = S_r \circ T_{\vec b + \vec a} \circ S_n = L_k^{\vec c} \circ S_n =$$

$$= T_{\vec c} \circ S_k \circ S_n = \begin{cases} T_{\vec c + \vec d} \\ T_{\vec c} \circ R_\sigma^E = R_\alpha^F \end{cases}$$

Мы получили, что композиция двух скользящих симметрий, как и композиция скользящей симметрии с отражением, дает либо параллельный перенос, либо поворот.

Итак, мы заполнили таблицу композиций движений плоскости:

	$T_{\vec v}$	R_φ^O	S_l	$L_n^{\vec a}$
$T_{\vec w}$	$T_{\vec v + \vec w}$	$R_\varphi^{O_1}$	S при $\vec w \perp l$, L иначе	S при $\vec w + \vec a \perp n$, L иначе
R_ψ^A	$R_\psi^{A_1}$	$T_{\vec u}$ при $\varphi + \psi = 0$, $R_{\varphi+\psi}^B$ иначе	S при $A \in l$, L иначе	S, L
S_m	S при $\vec v \perp m$, L иначе	S при $O \in m$, L иначе	T при $l \parallel m$, R иначе	T, R
$L_r^{\vec b}$	S при $\vec v + \vec b \perp r$, L иначе	S, L	T, R	T, R

На этом наше знакомство с движениями плоскости заканчивается.

Темой нескольких следующих уроков будут комплексные числа, при изучении которых мы воспользуемся полученными знаниями.